

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapă locală – Constanța, 21.02.2016

Clasa a VIII-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

a) $|x - \frac{1}{2}| \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 2 - x \geq 0, x + 1 \geq 0$

$|y - \frac{1}{2}| \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -1 \leq y \leq 2 \Rightarrow 2 - y \geq 0, y + 1 \geq 0$1p

Din inegalitatea mediilor rezultă $\sqrt{(2-x)(y+1)} + \sqrt{(2-y)(x+1)} \leq \frac{2-x+y+1}{2} + \frac{2-y+x+1}{2}$

$\frac{2-x+y+1}{2} + \frac{2-y+x+1}{2} \geq 3$ 1p

Egalitatea are loc pentru $2 - x = y + 1, 2 - y = x + 1 \Rightarrow x + y = 1$1p

b) $a = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \dots + \sqrt{2^{2015}} \mid \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}a = \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \dots + \sqrt{2^{2015}} + \sqrt{2^{2016}}$

Scădem cele două relații și obținem: $a = \frac{2^{1008}-1}{\sqrt{2}-1}$1p

$b = -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \dots + \sqrt{2^{2015}} \mid (-\sqrt{2}) \Rightarrow -b\sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \dots + \sqrt{2^{2015}} - \sqrt{2^{2016}}$

Scădem cele două relații și obținem $b = \frac{2^{1008}-1}{\sqrt{2}+1}$1p

$\frac{a}{b} = (\sqrt{2} + 1)^2, \frac{b}{a} = (\sqrt{2} - 1)^2$ 1p

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 6 \in \mathbb{N}$ 1p

SUBIECTUL 2

Raționalizând obținem $a(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) - b(\sqrt{3} - 1) - c(2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = -3\sqrt{2}$3p

$(a + b - 2c) - \sqrt{3}(a + b - 2c) + \sqrt{2}(a - 2c) = -3\sqrt{2}$1p

$(a + b - 2c)(1 - \sqrt{3}) + \sqrt{2}(a - 2c) = -3\sqrt{2}$1p

$a + b - 2c = 0$ și $a - 2c = -3 \Rightarrow b = 3$

$2c = a + 3, a$ impar, $a \in \{1, 3, 5, 7\}$ 1p

Strudierea cazurilor și aflarea $A = \{132, 534, 735, 936\}$ și

$\text{card } A = 4$1p

SUBIECTUL 3

Dacă ABCD și ABEF sunt pătrate cu $AB = 1m \Rightarrow AB = EF = CD = 1m$, $AB \parallel EF \parallel CD$ și $AB \perp (BCE)$. (1)1p

Deoarece $BE = BC = 1m$ și $EC = \sqrt{2}m$, atunci $BE \perp BC$ (2)

Din (1) și (2) rezultă CDFE dreptunghi, deci există $\mathcal{C}(O, r)$, astfel

încât $CF \cap DE = \{O\}$ și $r = \frac{1}{2} DE$. (3).....1p

Se calculează $DE = \sqrt{3}$ și din (3), rezultă $r = \frac{\sqrt{3}}{2} m$1p

Fie $HI \perp CD$ și $OI \cap CD = \{M\}$ și cum $H, I \in \mathcal{C}(O, r)$, atunci $H \in (MO)$,

astfel încât $HI = DE = \sqrt{3} m$ și $OH = OI = \frac{\sqrt{3}}{2} m$, iar

$CM = MD = \frac{1}{2} m$. (4).....1p

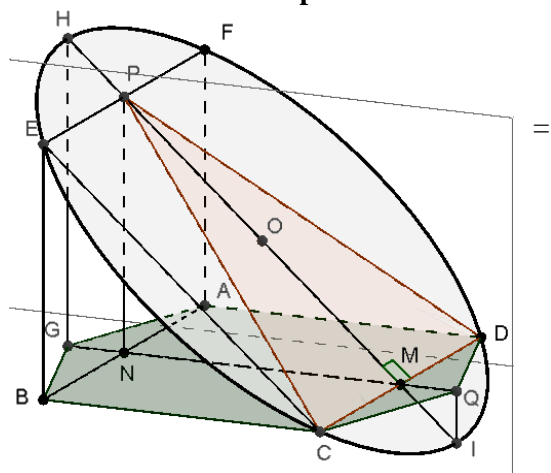
Notăm $HI \cap EF = \{P\}$ și cum $HI \perp CD$, CDFE dreptunghi și (4), atunci $EP = PF = \frac{1}{2} m$.

Fie G, N, și Q proiecțiile punctelor H, P și respectiv I pe planul (ABC).1p

Se demonstrează că $N \in (GM)$ și $Q \in (NM)$, astfel încât pe mediatoarea MN a segmentului [CD] se pot determina

$NM = 1m$ și $GN = MQ = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} m$1p

Se justifică natura poligonului și se calculează aria cerută adică, $A_{AGBCQD} = \frac{2 + \sqrt{6}}{4} m^2$1p



SUBIECTUL 4

Demonstează că $\triangle AMC \equiv \triangle CNB$1p

$m(\widehat{ACM})=m(\widehat{NBC})=x^0$ și $m(\widehat{BPC})=120^0$

$m(\widehat{BPC})=m(\widehat{MPN})=120^0$1p

$m(\widehat{MAN})+m(\widehat{MPN})=180^0 \Rightarrow$ AMPN patrulater inscriptibil,.....1p

$AM = \frac{AN}{2}$, $m(\hat{A})=60^0 \Rightarrow \triangle AMN$ dreptunghic în M..... 1p

$\widehat{AMN} \equiv \widehat{APN} \Rightarrow AP \perp PN$1p

Din T.3 $\perp \Rightarrow DP \perp BN$2p

Notă : Orice altă soluție corectă, diferită de cea din barem, va primi punctaj maxim